Amalgame e punti fissi

Def. Diciamo che un gruppo G è un' amalgama se si può scrivere come $G \simeq G_1 *_A G_2$, con $G_1 \neq A \neq G_2$.

Convenzione D'ora in poi le azioni su alberi si assumono senza inversioni.

Sia G un gruppo che agisce (senza inversioni) su un albero X, sia X^G l'insieme dei punti fissi (sottografo). Se $P, Q \in X^G$, anche $[P, Q]$ è fissata da G $\Rightarrow$ Se $X^G \neq \emptyset$ è convesso $\Rightarrow$ è un sottoalbero.

Def. Diciamo che G ha la proprietà (FA) se

(FA) $X^G \neq \emptyset$ per ogni albero X su cui G agisce.

Teorema G numerabile. Allora G gode di (FA) se e solo se le seguenti sono soddisfatte:

(i) G non è un'amalgama

(ii) G non ha quozienti isomorfi a $\mathbb{Z}$

(iii) G è finitamente generato. (se G non numerabile rimpiazzare con "G non è unione di una successione strettamente crescente di sottogruppi")

Dim

(FA) $\Rightarrow$ (i) Se G è un'amalgama $G \simeq G_1 *_A G_2$ c'è un albero su cui G agisce: quello dato dal dominio fondamentale

Poiché $G \neq G_1, G_2$ $X^G = \emptyset$. (vedi teorema 29/11)

(FA) $\Rightarrow$ (ii)

Se G ha un quoziente $\simeq \mathbb{Z}$ allora può agire per traslazioni sulla linea

contraddicendo (FA).

(FA) $\Rightarrow$ (iii)

Poiché G è numerabile, è unione di una catena $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$ di sgr. fin. generati (basta numerare i generatori, al più numerabili, e prendere $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$, $G_i = \langle g_1, \dots g_i \rangle$) Costruiamo un grafo X il cui insieme dei vertici siano l'unione disgiunta degli insiemi G/G_n, due vertici sono uniti da un edge $\Leftrightarrow$ appartengono a due insiemi G/G_n, G/G_{n+1} consecutivi e corrispondono sotto la mappa canonica $G/G_n \to G/G_{n+1}$

X è un albero, $G \curvearrowright X$. Se G ha (FA) c'è $P \in X^0$ invariante, $P \in G/G_n$ per un certo n. Ma questo implica che $G = G_n \Rightarrow G$ finitamente gen.

(i) + (ii) + (iii) $\Rightarrow$ (FA). Supponiamo $G \curvearrowright X$ albero. Sia $T = G \backslash X$ il quoziente. Sappiamo che $\pi_1^{a}(T)$ è isom. a un quoziente di G. Ma $\tilde{\pi}_1(T)$ è libero e G non ha quozienti isomorfi a $\mathbb{Z}$ per (ii), dunque l'unica possibilità è $\pi_1(T) = \{1\}$. Allora T è un albero, dunque ammette un sollevamento ad un sottoalbero di X. Possiamo identificare quindi G con $G_T = \mathrm{colim}(G, T)$. Poiché T è unione diretta dei suoi sottoalberi finiti anche G_T è unione dei $G_{T'} = \mathrm{colim}(G, T')$ al variare di T' sottoalberi finiti di T. Poiché G è finitamente generato, $\exists\, T'$ finito con $G = G_{T'}$. Scegliamone uno minimale con questa proprietà.

Se T' è un vertice P, $G = G_P$ e G ha pto fisso. Altrimenti, T' ha un vertice terminale P e $T'' = T' \setminus \{P\}$ è un albero. Se y denota l'unico edge che unisce P e T'' abbiamo

$$G = G_{T'} = G_{T''} *_{A = G_y} G_P$$

$$T' \text{ minimale} \Rightarrow G_{T''} \neq G \neq G_P$$

$$\Rightarrow G \text{ amalgama, assurdo.}$$

$\square$

Conseguenze di (FA)

Prop. se G ha (FA) ed è contenuto in un'amalgam $G_1 *_A G_2$, allora G è contenuto in un coniugat di G_1 o di G_2

Prop. Sia G numerabile con (FA), $\rho : G \to GL_2(K)$ una rappresentazione lineare di grado 2 con K campo commutativo. Allora $\forall s \in G$ gli autovalori di $\rho(s)$ sono interi su $\mathbb{Z}$.

Esempi

1) Un gruppo finitamente generato DI TORSIONE ha la proprietà (FA).

Dim. Basta mostrare che non è un'amalgama. Ma se $G = G_1 *_A G_2$, prendo $s_1 \in G_1 \setminus A$, $s_2 \in G_2 \setminus A$; $s_1 \cdot s_2$ è ridotta e ha ordine infinito.

2) Se ~~H~~ G ha (FA) ogni quoziente di G la ha.

3) Sia $H \triangleleft G$. Se H e G/H hanno (FA), ce l'ha anche G.

Dim. Se $G \curvearrowright X$ albero, $G/H \curvearrowright$ ~~H~~ X^H quindi c'è un punto fisso.

4) Sia $G' < G$ di indice finito. Se $G \curvearrowright X$ e $X^{G'} \neq \emptyset$, anche $X^G \neq \emptyset$. In particolare G' ha (FA) $\Rightarrow$ G ha (FA).

Dim. Sia H un s.gr. normale di indice finito contenuto in G' ($n = [G:G']$ $\varphi : G \to S_n \cong S(G/G')$, $H = \ker\varphi$ ~~e.g. l'intersezione dei coniugati di G'~~).

$X^H \neq \emptyset$ e $G/H \curvearrowright X^H$. G/H è finito $\Rightarrow$ ha punto fisso. $\Rightarrow X^G \neq \emptyset$.

5) È invece FALSO che se G ha (FA) anche i suoi sottogruppi di indice finito cell'han

(Contro)Esempio: siano $A, B, C \geq 2$ interi.

Sia $G = \langle a, b \mid a^A = 1, b^B = 1, (ab)^C = 1 \rangle$.

G ha (FA): infatti, se G agisce su un albero, a, b e ab hanno un punto fisso essendo di ordine finito. ~~[illegible]~~ Abbiamo visto che questo implica che a e b hanno un p.to fisso comune, che è quindi punto fisso di G.

Tuttavia, se $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \leq 1$ allora G contiene un sottogruppo H di indice finito isomorfo al π_1 di una superficie compatta orientabile di genere $g \geq 1$

$G = \pi_1($  $)$

$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \leq 1 \Leftrightarrow \chi^{O}(\sim) \leq 0$

$\Leftrightarrow O$ iperb. o euclidea → Ammette rappr. fedele in Isom per Selberg trovo

i

trov

olon

$(\mathbb{H}^2$

H

Tale H ha quozienti isomorfi a $\mathbb{Z}$, quindi non soddisfa (FA)

FATTO 0 sui gruppi nilpotenti

Se G è nilpotente fin. generato

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_n = \{1\}$$

$$G_i = [G, G_{i-1}]$$

allora ogni G_i è finitamente generato.

In particolare $[G, G]$ è finitamente generato

Dim. Supponiamo $G = \langle x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1} \rangle$

Allora G_1/G_2 è generato dalle immagini dei commutatori degli elementi x_{1i}, siano essi $x_{21}, \ldots, x_{2n_2}$.

Poiché $G_m = [G, G_{m-1}]$, per induzione su m possiamo dimostrare che i quozienti G_m/G_{m+1} sono generati dai commutatori $x_{m1}, \ldots, x_{mn_m}$ degli x_{1i} con gli $x_{m-1,j}$

Quindi ogni G_m è finitamente generato dagli elementi $x_{\ell i}$ con $\ell \geq m$. ~~e ogni elemento di~~ ~~[illegible]~~

$\square$

Fatti sui gruppi nilpotenti

EXTRA 1

1) Ogni sgr. di un gruppo nilpotente f.g. è finitamente generato.

Dim. Induzione sugli step

$n=1 \Rightarrow G$ abeliano $\Rightarrow$ OK

$n \Rightarrow n+1$. Dato H, $H \cap G_1$ è f.g. per ipotesi induttiva + FATTO 0.

$H/(H\cap G_1)$ è un sottogruppo di G/G_1

G/G_1 è abeliano finitamente generato

$\Rightarrow H/H\cap G_1$ è finitamente generato

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H\cap G_1 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[dd] & H/H\cap G_1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & \text{f.g.} & & \text{f.g.} & \\
 & & \text{f.g.} & &
\end{tikzcd}$$

□

2) Diciamo che un Gruppo è policiclico [illegible]

EXTRA
2

se ∃ una serie

$$G = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \dots \triangleright N_{n+1} = \{1\}$$

tale che $G_i/_{G_{i+1}}$ è ciclico.

Proposizione Ogni gruppo nilpotente finitamente generato è policiclico

Dim induzione sugli step

$n=1 \to G$ abeliano

$n \Rightarrow n+1$ $_{n\text{-step}}$ nilpt finitamente generato

G_1 è $\Rightarrow$ policiclico $\Rightarrow G/_{G_1}$ è abeliano finitamente generato $\Rightarrow$ policiclico.

Dico che allora anche G è policiclio

$$1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow G/_{G_1} \longrightarrow 1$$

~~Lo facciamo~~ Dal fatto che $G/_{G_1}$ è policiclico ho

$$G = N_0 \triangleright N_1 \triangleright \dots \triangleright N_{n+1} = G_1$$ sollevamento della serie di $G/_{G_1}$. A questa aggiungo la serie di $G_1 \Rightarrow G$ è policiclico. $\square$

Gruppi nilpotenti

Un gruppo G si dice nilpotente se ha una serie centrale discendente che termina con $\{1\}$ dopo finiti steps, i.e.,

$$G = G_0 \rhd \underset{\underset{[G, G_0]}{\parallel}}{G_1} \rhd \underset{\underset{[G, G_1]}{\parallel}}{G_2} \rhd \dots \rhd G_{\textcircled{n}} = \{1\}.$$

$\downarrow$ (n-step)-nilpotent

<u>Prop.</u> Sia G nilpotente fin.-gen. t.c. $G \curvearrowright X$ X albero. Allora accade una e una sola delle seguenti:

(a) G ha un punto fisso

(b) C'è una linea su cui G agisce per traslazioni tramite un omomorfismo non banale $G \to \mathbb{Z}$.

<u>Dim.</u>

Se ho una traslazione in G questa non ha punti fissi quindi a e b sono esclusivi. ~~&~~

sia s una traslazione e ~~sia~~

Sia inoltre T un sottoalbero di X stabile per s e s^{-1}, sia $Q \in T$. $[Q, sQ] \subseteq T$. Sia P' il vertice ~~del~~ di T più vicino a Q, allora anche $[P', sP'] \subseteq T$, e dunque ~~tutta~~ ~~la~~ la linea generata dai traslati di questi. Dunque T è unico.

Sia $1 = G_0 \triangleleft G_1 \cdots \triangleleft G_n = G$ t.c. G_i/G_{i-1} sono ciclici e ragioniamo per induzione su n. Se $n=0$ G è abeliano, dunque se è di torsione ha un punto fisso, altrimenti ammette un omomorfismo surgettivo su $\mathbb{Z}$. Se $n \geq 1$, applichiamo l'ipotesi induttiva a $H = G_{n-1}$. $\boxed{1}$ Se H ha un punto fisso, il gruppo ciclico G/H agisce su X^H, quindi questo o è di torsione, quindi ha un punto fisso (e quindi ce l'ha anche G), oppure è $\mathbb{Z}$, e dunque ~~agisce su~~ in X^H ~~senza punti fissi~~, c'è una linea su cui questo agisce per traslazioni, e dunque una linea in X su cui G agisce per traslazioni.

$\boxed{2}$ Se H non ha pti fissi, per ipotesi induttiva c'è una linea l su cui H agisce per traslazioni. Poiché H è normale in G, T è stabile anche per l'azione di G.

Dunque ho un omomorfismo $G \to Aut(T)$ $= Aut(\text{——})$ la ~~che~~ cui contiene un gruppo di immagine

traslazioni non banale. Questo è
o D_∞ o $\mathbb{Z}$. Ma D_∞ non è nilpotente $\Rightarrow$ tesi. □

Corollario 1 Se G è generato da elementi che hanno punti fissi anche G ha un punto fisso.

Dim Supponiamo $G = \langle s_i \rangle$ e di essere nel caso (b). Allora uno di questi s_i ha immagine $\neq 0$ in $\mathbb{Z}$, quindi non può avere un punto fisso!

Corollario 2 $G' = [G,G]$, $s \in G$ t.c. $s^n \in G'$ per qualche $n \geq 1$. Allora s ha un punto fisso.

Dim. Se G ha punto fisso è ovvio. Altrimenti siamo nel caso (b) e s ha immagine 0 in $\mathbb{Z}$ per ipotesi. Dunque s fissa tutti i punti della linea T.

~~Prop.~~ ~~8~~ **TEOREMA** $SL_3(\mathbb{Z})$ ha la proprietà (FA).

Dim. $SL_3(\mathbb{Z})$ è generato da $Id + e_{ij}$, $i \neq j$.

Poniamo

$z_0 = 1 + e_{12}$ $\quad z_1 = 1 + e_{13}$ $\quad z_2 = 1 + e_{23}$

$z_3 = 1 + e_{21}$ $\quad z_4 = 1 + e_{31}$ $\quad z_5 = 1 + e_{32}$

$(z_{i+6} = z_i \ \forall i)$

~~8 L 2~~ Valgono le seguenti proprietà:

(i) z_i commuta con z_{i+1} e z_{i-1};

(ii) $[z_{i-1}, z_{i+1}] = \begin{cases} z_i^{-1} & \text{se } i \text{ pari} \\ z_i & \text{se } i \text{ dispari} \end{cases}$

Dunque $SL_3(\mathbb{Z})$ è generato da z_1, z_3 e z_5.

Inoltre, $\forall i = 0, -, 5 \mod 6$, z_{i-1} e z_{i+1} generano

$B_i = \langle z_{i-1}, z_{i+1} \rangle$ nilpotente:

$G_0 = B_i = \langle z_{i-1}, z_{i+1} \rangle \triangleright G_1 = [B_i, B_i] = \langle z_i \rangle \triangleright 1$

Supponiamo ora che $SL_3(\mathbb{Z})$ agisca su un albero. Per quanto visto sui gruppi nilpotenti

z_i ha un punto fisso. Ma questo vale $\forall i$. Quindi B_i è un gruppo nilpotente f.g. generato da elementi con un punto fisso, dunque B_i ha un punto fisso. In particolare $z_{i-1} \cdot z_{i+1}$ ha un punto fisso. Dunque $SL_3(\mathbb{Z}) = \langle z_1, z_3, z_5 \rangle$ ha un punto fisso globale, quindi gode di (FA). $\square$

Oss. $SL_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$, dunque non ha (FA)

Sia ora $n \geq 1$; la proiezione $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{n}\mathbb{Z}$ induce

$$\varphi_n : SL(3, \mathbb{Z}) \to SL(3, \mathbb{Z}/_{n}\mathbb{Z})$$

Sia $\Gamma_n := \ker \varphi_n$ è un sgr normale di indice finito di $\Gamma = SL(3, \mathbb{Z})$, detto "principal congruence subgroup". I sottogruppi che contengono Γ_n sono detti congruence subgroups.

Teorema (Bass-Lazard-Serre '64; Mennicke '65)
Ogni sottogruppo di indice finito di Γ è un congruence subgroup.

Lemma Sia $E_n = \langle z_1^n, z_3^n, z_5^n \rangle$.
Allora $\Gamma_n = E_n$.

A questo punto basta ripetere la stessa dimostrazione per $E_n \Rightarrow \Gamma_n$ ha (FA).

Altri gruppi con (FA) (e fatti, passi)

(1) $SL(n, \mathbb{Z})$ per $n \geq 3$
(stessa dimostrazione)

(2) $Aut(F_n)$ per $n \geq 3$ (Bogopolski, '87)

(3) $Aut(\underbrace{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_{\text{almeno 4 copie!}})$ (Leder, '18

(4) Il caso di Aut(prodotto libero (finito) di gruppi) è studiato (Andrew, '19)

(5) Il caso generale con Aut(prodotto libero con fattori ciclici infinit) è aperto.

(6) Kazhdan Property T => Property FA
ma non il vice versa