Sia $G = G_1 *_A G_2$ e X l'albero su cui G agisce.

Diciamo che un sottoinsieme $\Sigma \subset G$ è <u>limitato</u> se c'è un bound sulle lunghezze degli ~~ele~~ dec. ridotte degli elementi di Σ.

<u>Prop</u> Sia $\Gamma < G$ t.c. $\Gamma \setminus \{1\}$ non interseca ogni ~~da~~ coniugato di G_1 e di G_2. Allora Γ è un gruppo libero.

Idea: ipotesi $\Rightarrow$ ~~G~~ Γ agisce liberamente

<u>Teorema</u> Ogni sgr. limitato di G è contenuto in un coniugato di G_1 o di G_2.

Dimostriamo prima: <u>Prop.</u> $\Gamma \curvearrowright X$ albero. TFAE

(a) $\forall A \subseteq$ ~~vert~~ X^0 limitato, $\Gamma \cdot A$ è limitato

(b) $\exists P \in X^0$ t.c. $\Gamma \cdot P$ è limitato

(c) $\exists P \in X^0$ invariante per Γ

<u>Dim</u> (a) $\Rightarrow$ (b) ovvio

(c) $\Rightarrow$ (a) Sia $A \subset X^0$ limitato t.c. ΓA non limitato, cioè $\exists Q \in A$, $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma$ t.c. $d(Q, \gamma_n(Q)) \to +\infty$. MA

$$d(Q, \gamma_n(Q)) \leq d(Q, P) + d(P, \gamma_n Q) =$$
$$= d(P, Q) + d(\gamma_n P, \gamma_n Q) = 2d(P, Q).$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Sia Y il sottoalbero generato da $\Gamma \cdot P$.
Questo è limitato e Γ-invariante.
Quindi ammette un geometric edge invariante.
Poiché l'azione è senza inversioni, gli estremi di questo edge sono fissati, da cui la tesi.

<u>Dim. teorema</u> Sia $T = \underset{G_1}{\overset{P}{\circ}} \overset{y}{\underset{A}{\text{———}}} \underset{G_2}{\overset{Q}{\circ}}$ dom. fond.

Se $g \in G_1 \cup G_2$, allora T e gT hanno un vertice comune. Dunque se $\Sigma \subseteq G$ è limitato, anche $\Sigma \cdot (\text{vert } T)$ lo è $\Rightarrow$ per (c) c'è un vertice di X invariante per $\Gamma \Rightarrow \Gamma$ è contenuto in un coniugato di G_1 o G_2. $\square$

<u>Tree of groups</u>

<u>Def.</u> Un grafo di gruppi (G, T) consiste di un grafo T, un gruppo G_P per ogni $P \in T^0$ e un gruppo G_y $\forall y \in T^1$, insieme a degli hom. inj. $G_y \to G_{w(y)}$ (not. $a \to a^y$) e t.c. $G_y = G_{\bar{y}}$.

Quando T è un albero diciamo che (G, T) è un albero di gruppi.

PARENTESI: COLIMITI

Sia $(G_i)_{i\in I}$ famiglia di gruppi, $\forall i,j\in I$ sia $F_{ij}\subseteq \mathrm{Hom}(G_i,G_j)$ (ammettiamo $F_{ij}=\emptyset$)

Cerchiamo un $G=\mathrm{colim}(G_i,F_{ij})$ e una famiglia di omomorfismi $f_i: G_i\to G$ t.c. $f_j\circ f=f_i$ $\forall f\in F_{ij}$

tali che

(*) se H gruppo, $h_i: G_i\to H$ om t.c. $h_j\circ f=h_i$ $\forall f\in F_{ij}$

$\Rightarrow \exists!\, h: G\to H$ t.c. $h_i=h\circ f_i$

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[r, bend right, "f_j\circ f"'] \arrow[dr, "h_i"'] \arrow[dr, bend left, "h_j"] & G \arrow[d, dashed, "h"] \\
& H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h_i"] & G \arrow[d, dashed, "h"] \\
G_j \arrow[r, "h_j"'] & H
\end{tikzcd}$$

Tale G esiste ed è unico → prop. universale

prendo i generatori dei G_i

e le relazioni xyz^{-1} se $x,y,z\in G_i$ $z=xy$

xy^{-1} $x\in G_i$ $y\in G_j$ $y=f(x)$ per almeno una $f\in F_{ij}$.

ESEMPIO $G_0 = A$, G_1, G_2

$$F_{01} := i : A \hookrightarrow G_1 \qquad F_{02} := i : A \hookrightarrow G_2$$

$$F_{12} = F_{20} = F_{10} = F_{21} = \emptyset$$

$$\mathrm{colim}(G_i, F_{ij}) = G_1 *_A G_2 .$$

Se ho (G, T) tree of Groups pongo

$G_T := \mathrm{colim}(G, T)$ (intendo che i gruppi sono vertex ed edge groups e gli hom. quelli della def [e gli altri vuoti]).

Esempio 1 Supponiamo T sia ottenuto aggiungendo un vertice P ed un geom. edge $\{g, \bar{g}\}$ a un albero T' (i.e. $P = \omega(g)$, $(T')^0 = T^0 \setminus \{p\}$).
Abbiamo

$$G_T = G_{T'} *_{G_g} G_p \qquad \text{dove } G_{T'} = \mathrm{colim}(G, T')$$

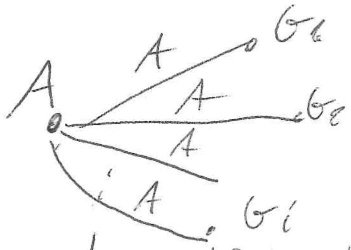
Esempio 2 sia $(G_i)_{i \in I}$ famiglia di gruppi, A gruppo, $f_i : A \to G_i$ iniettivo. Sia O un elemento che non appartiene ad I. Formiamo un albero T t.c.

$$T^0 = I \cup \{0\} \qquad T^1 = \{(0, i) \text{ e } (i, 0) \mid_{i \in I}\}$$

Definiamo un albero di gruppi (G, T)

ponendo $G_0 = A$, $G_i = G_i$ e $G_y = A$ $\forall y \in T^1$,

ponendo $A \xrightarrow{id} A$ $A \xrightarrow{f_i} G_i$ come hom inj.

Allora $G_T = *_A G_i$.  $\boxed{5}$

[D'ora in poi identificheremo vertex groups ed edge groups con le loro immagini in G_T]

Teorema Sia (G,T) un albero di gruppi.
Esiste un grafo X contenente T e un'azione di G_T su X caratterizzata (a isom) dalla seguente proprietà:

T è un dominio fondamentale per X (mod G_T) e $\forall P \in T^0$ ($y \in T^1$) lo stabilizzatore di P (y) in G_T è G_P (G_y)

Inoltre X è un albero, e verrà chiamato grafo "associato" a (G,T).

Dim. È chiaro che $X^0 = \bigsqcup_{P \in T^0} G_T \cdot P \left(\cong G_T/G_P\right)$

$X^1 = \bigsqcup_{y \in T} G_T \cdot y \left(\cong G_T/G_y\right)$

$G_y \hookrightarrow G_{o(y)}$ e $G_y \hookrightarrow G_{t(y)}$ definiscono le estremità. Questo definisce un grafo su

cui G_T agisce in maniera offia, e tutte le asserzioni del teorema sono ovvie tranne che X è un albero.
Per dimostrare ciò, rappresentiamo T come limite diretto (colimite) dei suoi sottoalberi finiti ($\star$) e G_T e X come colimiti dei ~~suoi~~ gruppi e grafi corrispondenti.
Ci possiamo quindi ridurre al caso in cui T è finito.

Per induzione su $n = |T^0|$ assumiamo $n \geq 1$ altrimenti T e X coincidono!
Sia $y \in T^1$ t.c. $P = \omega(y)$ è terminale.

T è ottenuto da $T' = T \setminus \{P\}$ aggiungendo P, y e $\bar{y}$. Ponendo $G_{T'} = \mathrm{colim}(G, T')$

$$G_T = G_{T'} *_{G_y} G_P$$

Sia $X' = G_{T'} \cdot T' \subseteq X$, è il sottografo associato a (G, T') ed è un albero per ipotesi induttiva.

Inoltre i gX', $g \in G_T/G_{T'}$ sono a due a due disj.

Sia $\tilde{X}$ il grafo ottenuto da X contraendo i gX' a punti. $G_T \curvearrowright \tilde{X}$ con dom. fondamentale il segmento T/T',

$$T/T' = \begin{array}{ccc} \overset{T'}{\circ} & \xrightarrow{\;y\;} & \overset{P}{\circ} \\ G_{T'} & G_y & G_P \end{array}$$

$\Rightarrow G_T \cong G_{T'} *_{G_y} G_P$
$\Rightarrow \tilde{X}$ è un albero $\Rightarrow$ lo è X.

($\star$) Sia P vertice di X.

$\forall n \geq 0$, sia $X_n = \{Q \in X^\circ \mid d(Q,P) = n\}$.

Se $Q \in X_n$, $n \geq 1$, $\exists!\, Q'$ t.c. $d(P,Q') < n$ e $d(P,Q) = 1$. Questo definisce una mappa

$$f_n : X_n \to X_{n-1}$$
$$Q \to Q'$$

$$X_n \to X_{n-1} \to \dots \to X_1 \to X_0 = \{P\}.$$

Conoscere questo sistema ci permette di ri costruire X: i vertici di X sono l'unione degli X_n, i geom. edges sono $\{Q, f_n(Q)\}$ $\forall Q \in X_n$, $n \geq 1$.

Sia $X' \subseteq X^\circ$. Ogni sottoalbero $\supseteq X'$ contiene le geodetiche con estremi in X'! ~~se X' è finito~~ Viceversa, vertici e lati di tali geodetiche formano un sottoalbero $\Gamma' \subseteq X$. Se X' è finito lo è anche Γ'. Dunque Γ è l'unione diretta dei suoi sotto alberi finiti.

Viceversa, sia G un gruppo che agisce su un grafo X con dominio fondamentale un albero T.
Sia (G,T) il tree of groups con G_P e G_y stabilizz.
($G_y \hookrightarrow G_{t(y)}$ inclusioni) e $G_T = \mathrm{colim}(G,T)$.
le inclusioni $G_P \to G$ si estendono ad un omomorfismo $G_T \to G$. Se X è connesso questo omomorfismo è surgettivo

$\hookrightarrow$ ~~Lemma~~ sia $G \curvearrowright X$ connesso, T ~~dom. fond.~~ albero di rappresentanti di X mod G, $T \subseteq Y \subseteq X$ sottografo e t.c. ogni edge di Y ha un'estremità in T e t.c. $G \cdot Y = X$
$\forall y \in Y^1$ t.c. $\alpha(y) \in T$, sia $g_y \in G$ t.c. $g_y \cdot \omega(y) \in T^0$. ~~Allora~~ $H = \langle g_y, G_P \rangle_{P \in T^0} = G$.

Dim.
Basta mostrare che $H \cdot T^0 = X^0$.
$H \ni g_y \Rightarrow H \cdot T^0 \supseteq Y$. Mostriamo che $H \cdot Y = X$.
X connesso $\Rightarrow$ basta mostrare che un edge w con origine in $H \cdot Y$ appartiene interamente ad $H \cdot Y$. Traslando w con un elem

di H se necessario, possiamo assumere che $P = \alpha(w) \in T^0$. Poiché $G \cdot Y = X$, $\exists g \in G$ t.c. $gw \in Y$. Vogliamo mostrare che $g \in H$.

Poiché $gw \in Y$, $\alpha(gw) \in T^0$ oppure $\omega(gw) \in T^0$.

~~nel~~ primo caso, P e gP sono due vertici di T congruenti modulo G, quindi uguali e $g \in G_P$
$\Rightarrow g \in H$

Secondo caso, $y = gw$ ha origine in T^0
$\Rightarrow g_y \cdot \omega(y) \in T^0 \Rightarrow P$ e $g_y \cdot \omega(y) = g_y g P$ coincidono e $g \in g_y^{-1} G_P \Rightarrow g \in H$.

__Oss__. Se T dom fond. possiamo prendere i $g_y = 1$

$\square$

D'altra parte, se $\tilde{X}$ denota l'albero associato a (G, T), l'identità $T \to T$ si estende unicamente a un morfismo $\tilde{X} \to X$ equivariante rispetto a $G_T \to G$.

Teorema TFAE

(1) X albero

(2) $\tilde{X} \to X$ isomorfismo

(3) $G_T \to G$ isomorfismo

Dim. (3) => (2) segue dal teorema precedente
(2) => (1)

(2) => (3) Sia $P \in T^0$ e $(G_T)_P$ (risp. G_P) lo stabilizz. di P in G_T (risp. in G). Per costruzione l'omomorfismo $G_T \xrightarrow{\varphi} G$ induce un isomorfismo

$$(G_T)_P \to G_P$$

D'altra parte se $\tilde{X} \to X$ è bigettiva,

$$\ker(\varphi) \subseteq (G_T)_P \Rightarrow \ker(\varphi) = \{1\}.$$

ma $G_T \to G$ è anche surg => è isom.
per il lemma precedente

(1) => (2) $G_T \cdot T = \tilde{X}$ e $G \cdot T = X$

$$\Rightarrow \tilde{X} \xrightarrow{f} X \text{ è suriettivo.}$$

D'altra parte $G_T \xrightarrow{\varphi} G$ induce isomorfismi tra gli stabilizzatori dei corrispondenti vertici (ed edges) di $\tilde{X}$ e X. Quindi f è localmente iniettivo. (i.e., iniettivo sull'insieme degli edge con origine data.

Lemma $f: \tilde{X} \to X$ localmente inj, $\tilde{X}$ connesso, X albero $\Rightarrow$ f iniettivo.

Dim. $\tilde{X}$ connesso $\Rightarrow$ basta mostrare che se c è cammino iniettivo in $\tilde{X}$ $\Rightarrow$ $f \circ c$ è iniettivo. X albero $\Rightarrow$ basta mostrare che $f \circ c$ non ha "retromarce"

segue da c inj + f loc. inj.

Da qui segue f iniettivo $\Rightarrow$ isomorfismo

RIASSUNTO

Oss. $G \curvearrowright X$ albero. Quando $G \backslash X$ è un albero, c'è un dominio fond. T di X mod G che è un albero isom. a $G \backslash X$, e la struttura di G è data dai G_T grazie al teorema precedente