Grafi

Def. Un *grafo* X è una tupla $(X^0, X^1, \alpha, \omega, \bar{\ })$ dove

$\emptyset \neq X^0 = \{\text{vertici}\}$

$X^1 = \{\text{lati}\}$ (o "edges")

$\alpha : X^1 \to X^0$ inizio

$\omega : X^1 \to X^0$ fine

$\bar{\ } : X^1 \to X^1$ inverso

t.c.

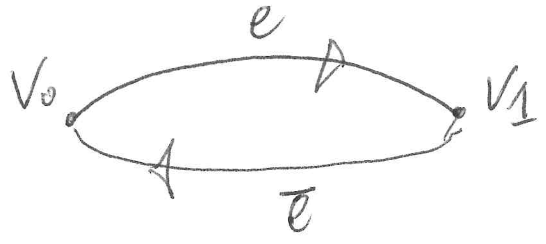
$$\left.\begin{array}{l} \bar{\bar{e}} = e \\ \bar{e} \neq e \\ \alpha(\bar{e}) = \omega(e) \end{array}\right\} \ \forall e \in X^1$$

I vertici $\alpha(e)$ e $\omega(e)$ si dicono risp. vertice _iniziale_ e _terminale_ del lato e.

X si dice _finito_ se $|X^0 \cup X^1| < +\infty$.

_Es._ $X^0 = \{v_0, v_1\}$ $X^1 = \{e, \bar{e}\}$

$\alpha(e) = v_0$ $\omega(e) = v_1$ $\left(\Rightarrow \begin{array}{l} \alpha(\bar{e}) = v_1 \\ \omega(\bar{e}) = v_0 \end{array} \right)$



Def. Un <u>MORFISMO</u> di grafi $p: X \to Y$ è una mappa che manda vertici in vertici, lati in lati e t.c.

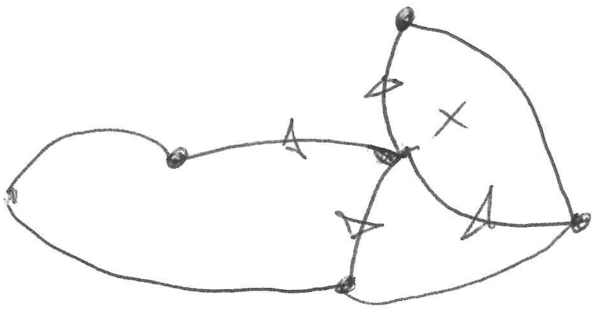
$$p(\alpha(e)) = \alpha(p(e)), \quad p(\omega(e)) = \omega(p(e)),$$
$$p(\overline{e}) = \overline{p(e)}.$$

p si dice isomorfismo se è bigettiva (sia sui vertici che sugli edge), automorf. se $X = Y$.

<u>Notaz.</u> Se $x \in X^0$, $y \in Y^0$, $p(x) = y$, potremo scrivere $p: (X, x) \to (Y, y)$.

Def. La <u>stella</u> di un vertice $x \in X^0$ è definita come

$$st(x) := \{ e \in X^1 \mid \alpha(e) = x \}.$$



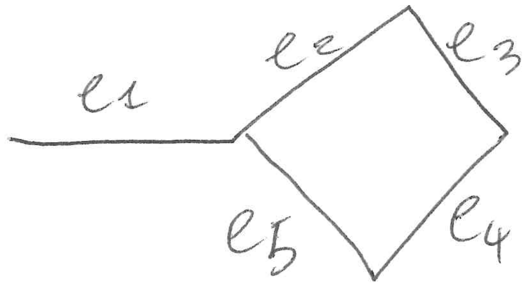
La <u>valenza</u> di $x \in X^0$ è

$$val(x) := |st(x)|.$$

Def. Se tutti i vertici hanno la stessa valenza, il grafo si dice REGOLARE.

Def. Un grafo si dice <u>orientato</u> se per ogni coppia $\{e, \bar{e}\}$, $e \in X^1$, è scelto un elemento. Questo lato si dice <u>positivamente orientato</u>.
Indichiamo con X^1_+ l'insieme dei lati positivamente orientati e con $X^1_- = X^1 \setminus X^1_+$ i lati negativamente orientati.

Def. Una sequenza $\ell = e_1 e_2 \dots e_n$ di edge in un grafo X è detta <u>cammino di lunghezza n</u> se $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ $\forall i = 1, \dots, n-1$.
In questo caso, ℓ si dice cammino da $\alpha(e_1)$ ad $\omega(e_n)$ (che sono i vertici "iniziali" e "terminali" di ℓ). Il cammino si dice <u>chiuso</u> se $\alpha(e_1) = \omega(e_n)$.



$\ell_1 = e_1 e_2 e_3$
non chiuso

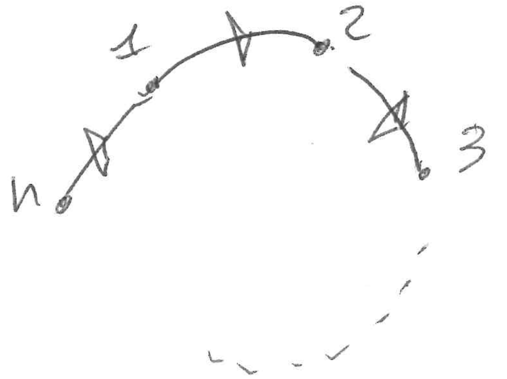
$\ell_2 = e_2 e_3 e_4 e_5$
chiuso.

(Un vertice $v \in X^0$ si considera cammino di lunghezza 0 da v a sé)
Un cammino ℓ si dice <u>ridotto</u> se ha lunghezza 0 oppure $\ell = e_1 \dots e_n$ con $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$ $\forall i = 1, \dots, n-1$.
Un grafo X si dice <u>connesso</u> se $\forall v, w \in X^0$ c'è un cammino da v in w.

Un circuito/ciclo in X è un sottografo isomorfo ad $\mathcal{C}_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Esempio $\mathcal{C}_n$: $X^0 = \{1, \dots, n\}$

$X^1_+ = \{e_1, \dots, e_n\}$



$\alpha(e_i) = i \ \forall i$

$\omega(e_i) = i+1 \ \forall i < n$

$\omega(e_n) = 1$

Def. Un ALBERO è un grafo connesso che non contiene circuiti.

Lemma ~~Tralbe~~ X grafo, $T \subseteq X$ sottoalbero massimale (wrt inclusione) $\Rightarrow T$ contiene tutti i vertici di X.

Dim. Supponiamo $\exists x \in X^0 \setminus T^0$. X connesso $\Rightarrow \exists e \in X^1$ t.c. $\alpha(e) \in T^0$, $\omega(e) \notin T^0$. Ma allora $T \cup \{e\}$ è un albero più grande di T, che era massimale, assurdo.

Esercizio Un grafo connesso ammette un sottoalbero massimale. (SPANNING TREE)

<u>Def.</u> Un cammino ridotto in un albero si dice <u>geodetica</u>.

<u>Lemma</u> X albero, X_1, X_2 sotto-alberi disgiunti $\Rightarrow \exists!$ geodetica con vertice iniziale in X_1, vertice finale in X_2, tutti i lati fuori sia da X_1 che da X_2

"Dim"

<u>Def.</u> X albero, $v, w \in X^0$. Denotiamo con $[v, w]$ l'unica geodetica da v a w.
La sua lunghezza ($:= \#$ lati) è denotata con $d(v, w)$.

<u>Esercizio</u> (X^0, d) è uno spazio metrico.

Def. Sia X un albero e $\tau \in Aut(X)$.
Diciamo che τ agisce senza inversioni se $\tau(e) \neq \bar{e}$ $\forall e \in X^1$. [Se un gruppo G agisce su X per automorfismi, diciamo che G agisce senza inversioni se ogni suo elemento lo fa]

Definiamo translation length di τ

$$|\tau| := \min_{v \in X^0} d(v, \tau(v)).$$

Se $|\tau| = 0$, denotiamo con $\mathring{\tau}$ il sottografo di X fatto dagli $x \in X^0 \cup X^1$ t.c. $\tau(x) = x$.
Se $|\tau| > 0$, denotiamo con $\vec{\tau}$ il sottoalbero minimale di X contenente i vertici x t.c. $d(x, \tau(x)) = |\tau|$.

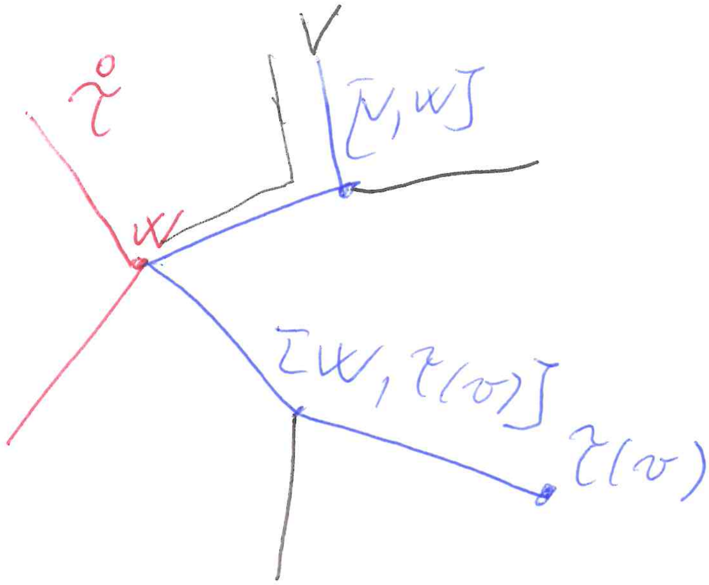
Oss. $d(\tau(v), \tau(w)) = d(v, w)$.

Teorema X albero, $\tau \in Aut(X)$.

1) Se $|\tau| = 0 \Rightarrow \mathring{\tau}$ è un albero.

Sia $v \in X^0$ e $w \in (\mathring{\tau})^0$ t.c. $d(v, w)$ è minima. Allora $d(v, w) = d(\tau(v), w)$ e la concatenazione tra $[v, w]$ e $[w, \tau(v)]$ è la geodetica $[v, \tau(v)]$

Disegno



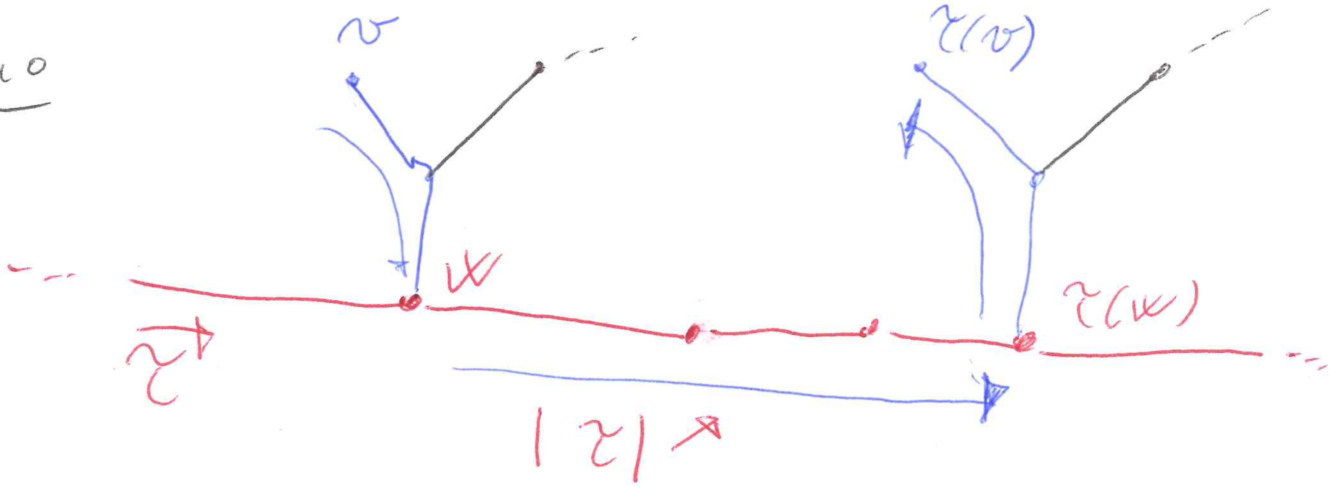
2) Se $|\tau| > 0$ e τ agisce senza inversioni, $\vec{\tau}$ è isomorfo a ℓ_∞ (la linea) e τ agisce su ℓ_∞ per traslazioni di lunghezza $|\tau|$.

Sia $v \in X^0$ e $w \in (\vec{\tau})^0$ t.c. $d(v,w)$ è minima.

Allora $[V, \tau(v)] \cap \vec{\tau} = [w, \tau(w)]$

e $d(v, \tau(v)) = |\tau| + 2 \cdot d(v, w)$.

Disegno



<u>Dim</u> 1) Se $v, w \in \overset{\circ}{\tau}$ $\Rightarrow$ $\tau([v,w])$ è una geodetica tra $\tau(v) = v$ e $\tau(w) = w$. Le geodetiche sono uniche negli alberi $\Rightarrow$

$$\tau([v,w]) = [\tau(v), \tau(w)] = [v,w] \subseteq \overset{\circ}{\tau}.$$

Quindi $\overset{\circ}{\tau}$ è connesso $\Rightarrow$ è un albero.

Se $w \in \overset{\circ}{\tau}$

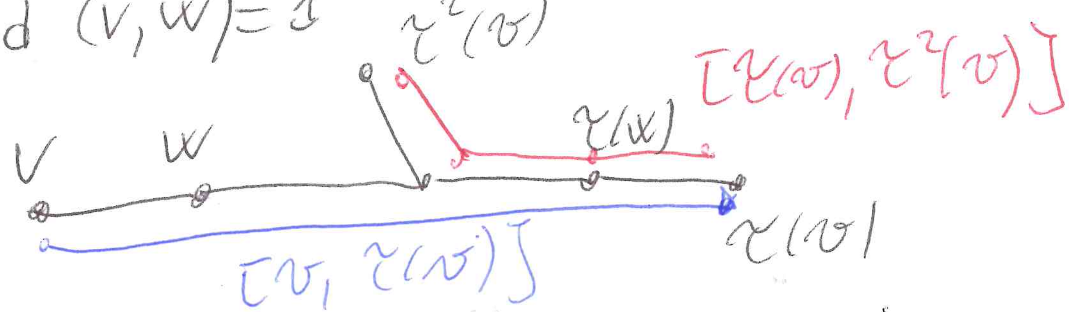
$$d(v,w) = d(\tau(v), \tau(w)) = d(\tau(v), w).$$

2) Sia $v \in X^{\circ}$ t.c. $d(v, \tau(v)) = |\tau|$.

<u>Claim</u>: L'ultimo lato di $[v, \tau(v)]$ non è l'inverso del primo lato di $[\tau(v), \tau^2(v)]$.

<u>Dim</u> se lo fosse... se $|\tau| = 1$ allora τ invertirebbe il lato $[v, \tau(v)]$, assurdo

se $|\tau| > 1$, sia w un vertice su $[v, \tau(v)]$ con $d(v,w) = 1$



Allora $d(w, \tau(w)) = d(v, \tau(v)) - 2 < |\tau|$, assurdo.

Quindi $T = \cdots [\tau^{-1}(v), v]\,[v, \tau(v)]\,[\tau(v), \tau^2(v)] \cdots$ è ridotto e isomorfo a ℓ_∞, e τ vi agisce per traslazioni di lungh. $|\tau|$.

Se $v \in X^0 \setminus T^0$ e $w \in T^0$ a minima dist. da v, allora

$$d(v,\tau(v)) = d(v,w) + d(w,\tau(w)) + d(\tau(w),\tau(v))$$
$$= 2d(v,w) + |\tau| > |\tau|.$$

Quindi $\tau^d = T$ ———o——o—— albero → Fine lezione 1. □

<u>Def</u> Sia $\tau \in Aut(X)$ che agisce senza inversioni.

τ è detta:
- <u>rotazione</u> se $|\tau| = 0$
- <u>traslazione</u> se $|\tau| > 0$

τ^+ è detto "asse".

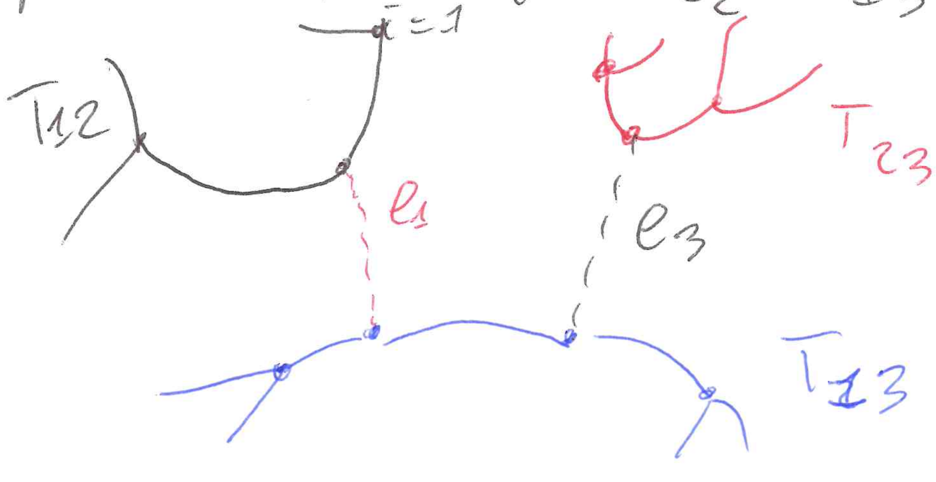
<u>Lemma</u>. X albero, $T_1, \dots, T_n$ sottoalberi di X t.c. $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ $\forall i,j$. Allora $\bigcap_{i=1}^{n} T_i \neq \emptyset$.

<u>Dim</u> induzione su n

<u>$n=3$</u> Siano $T_1, T_2, T_3 \subset X$ s.alberi, $T_{ij} := T_i \cap T_j$

Allora T_{ij} è connesso $\Rightarrow$ è un sottoalbero.

se per assurdo $\emptyset = \bigcap_{i=1}^{3} T_i = T_{12} \cap T_{13} = T_{12} \cap T_{23} = T_{13} \cap T_{23}$



Sia e_1 la geod. tra T_{12} e T_{13}
e_3 // T_{13} e T_{23}

Per il lemma prec. $\nexists$ $e_1 \subset T_1$, $e_3 \subseteq T_3$

$\Rightarrow e_1 \cup T_{13} \cup e_3$ è un albero che contiene la geod. e_2 da T_{23} a T_{12} $\Rightarrow e_3 \subseteq e_2 \subseteq T_2$

$\Rightarrow e_3 \subseteq T_{23}$, assurdo.

$n-1 \Rightarrow n$ $\boxed{T_1, \bigcap_{i=2}^{n-1} T_i, T_n}$ → stesso ragionamento.

$\square$

<u>Prop</u> $\tau_1, \dots \tau_n \subseteq Aut(X)$ X albero.

se τ_i e $\tau_j \tau_i$ sono rotazioni $\forall i, j$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{\tau}_i \neq \emptyset.$$

<u>Dim</u>. Dal lemma precedente basta mostrare che $\forall i, j$ $\mathring{\tau}_i \cap \mathring{\tau}_j \neq \emptyset$.

Se così non fosse, sia $[v, w]$ la geodetica che connette $\mathring{\tau}_i$ e $\mathring{\tau}_j$. Allora

$[v, \tau_j \tau_i(v)] = [v, \tau_j(v)]$

Per il teorema il punto medio di questa geodetica, sia esso w, è $\mathring{\tau}_j \cap (\mathring{\tau}_j \mathring{\tau}_i)$
$\Rightarrow \tau_j(w) = w = \tau_j \tau_i(w)$
$\Rightarrow w = \tau_i(w) \Rightarrow w \in \mathring{\tau}_i \cap \mathring{\tau}_j$, assurdo.

__Corollario__ $G < Aut(X)$ finito, X albero, G agisce senza inversioni. Allora G ha un punto fisso globale.

__Dim.__ Le traslazioni hanno ordine ∞
$\Rightarrow G$ è fatto solo di rotazioni, a cui applico il corollario precedente.

Gruppi che agiscono su grafi

__Def.__ Un gruppo G agisce su un grafo X se G agisce su X^0 e X^1 t.c. $\forall g \in G$, $e \in X^1$, si ha $g(\alpha(e)) = \alpha(g(e))$, $g(\bar{e}) = \overline{g(e)}$.
G agisce __senza inversioni__ se $g(e) \neq \bar{e}$ $\forall e \in X^1$.

__Def.__ La __suddivisione baricentrica__ $B(X)$ di un grafo X è così definita:
- rimpiazziamo ogni edge $e \in X^1$ con due edge e_1, e_2 e un nuovo vertice v_e

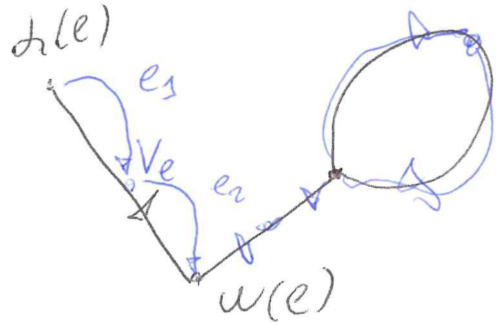
t.c. $\alpha(e_1) = \alpha(e)$ $\omega(e_1) = v_e = \alpha(e_2)$ $\omega(e_2) = \omega(e)$

$(\overline{e})_2 = \overline{e_1}$ $(\overline{e})_1 = \overline{e_2}$ e $v_{\overline{e}} = v_e$.

Se $G \curvearrowright X \Rightarrow$ agisce anche su $B(X)$ ponendo

$g(e_1) = (g(e))_1$, $g(e_2) = (g(e))_2$, $g(v_e) = v_{g(e)}$.

e preservando l'azione sui rimanenti vertici $X^0 \subset B(X)$.



<u>Lemma</u>(ex). G agisce su $B(X)$ senza inversioni

<u>Def</u>. Sia G gruppo, $S \subseteq G$; denotiamo con

~~Cay(G,S)~~ (o $\Gamma(G,S)$) il grafo orientato

con vertici $\Gamma(G,S)^0 = G$ ed edge positivi

$\Gamma(G,S)^1_+ = G \times S$

con $\alpha(g,s) := g$ $\omega(g,s) := g \cdot s$.

$\Gamma(G,S)^1_- = G \times \{s^{-1} \mid s \in S\}$

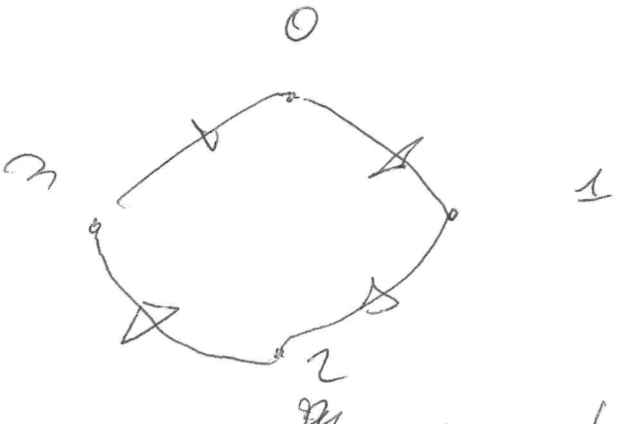
$\overline{(g,s)} = (gs, s^{-1})$, dove consideriamo

s^{-1} come un simbolo formale (i.e., $(gs, s^{-1}) \notin G \times S$)

Se $G = \langle S \rangle$ $\Gamma(G,S)$ si dice <u>grafo di Cayley</u>

di G rispetto a S.

Es. $\Gamma(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \{1\})$



Rem. - C'è un'azione naturale di G su $\Gamma(G,S)$ per moltiplicazione a sinistra.

$$g \cdot g' = gg' \qquad g \cdot (g', s) = (gg', s)$$

- L'azione di G è libera e senza inversioni.
- $\Gamma(G,S)$ è connesso $\iff G = \langle S \rangle$.

Def. Sia ~~una~~ X un grafo ed $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X^0 (e su X^1). Indichiamo con $\mathcal{O}(x) = \{ y \in X^0 \cup X^1 \mid x \mathcal{R} y \}$ l'orbita di x, $x \in X^0 \cup X^1$.

Definiamo il Grafo quoziente $\mathcal{R} \backslash X$

$$(\mathcal{R} \backslash X)^0 = \{ \mathcal{O}(v) \mid v \in X^0 \}$$

$$(\mathcal{R} \backslash X)^1 = \{ \mathcal{O}(e) \mid e \in X^1 \} \qquad \text{t.c.}$$

i) $d(\vartheta(e)) = \vartheta(v)$ se $v \mathcal{R} d(e)$ $\boxed{14}$

ii) $\overline{\vartheta(e)} = \vartheta(\bar{e})$ iii) se $e \mathcal{R} e'$ $\begin{array}{l} d(e) \mathcal{R} d(e') \\ u(e) \mathcal{R} u(e') \end{array}$ $\bar{e} \mathcal{R} \bar{e'}$

La __proiezione__ $p : X \to \mathcal{R}\backslash X$ è

$$\begin{aligned} v &\longrightarrow \vartheta(v) \\ e &\longrightarrow \vartheta(e) \end{aligned}$$

un morfismo di grafi.

. Se $y \in (\mathcal{R}\backslash X)^0 \cup (\mathcal{R}\backslash X)^1$ e $x \in X^0 \cup X^1$

t.c. $p(x) = y$ allora x è detto un __sollevamento__ di y

Def. Un morfismo di grafi $p : X \to Y$ si dice localmente suriettivo se $\forall y \in Y^0$, $\forall x \in p^{-1}(y)$
$p|_{st(x)} : st(x) \to st(y)$ è suriettivo $\boxed{15}$

Oss. Se R è la rel. di eq. indotta da un'azione $G \curvearrowright X$ senza inversioni, allora la proiezione è localmente suriettiva.

Prop. $p : X \to X'$ morfismo localmente suriettivo.
Allora $\forall\, T' \subseteq X'$ sottoalbero $\exists\, T \subseteq X$ sottoalbero t.c. $p|_T : T \to T'$ è un isom. di grafi.

$$\begin{array}{ccc} X & \supseteq & T \\ \downarrow p & & \vdots\, \cong \\ X' & \supseteq & T' \end{array}$$

Dim. Sia M l'insieme dei sottoalberi di X che si proiettano ~~sur~~ iniettivamente in X' e t.c. $p(T) \subseteq T'$.
Questo è un insieme non vuoto, parz. ordinato per inclusione, in cui ogni catena ascendente ammette un maggiorante dato dall'unione
$\Rightarrow$ per Zorn $\exists\, T \subseteq M$ massimale.

Vogliamo mostrare che $p(T)=T'$.

Se così non fosse $\exists\, e' \in (X')^{1}$, $\alpha(e')\in p(T)$, $\omega(e')\in T'\setminus p(T)$

Sia $e\in X^1$ t.c. $p(e)=e'$, $x:=\alpha(e)\in T$, $e\notin T$

~~Per definizione~~ $\cancel{\sigma(x)=\alpha(e')\in p(T)}$

~~quindi~~ $\cancel{\exists\, y\in T}$

(p è localmente suriettivo quindi tale e esiste)

Allora $T\cup\{e\}$ si proietta iniettivamente dentro T' per costruzione, è ancora un albero e contiene $T \Rightarrow T$ non è massimale, assurdo. $\square$

Realizzazione topologica

X grafo. ~~Cost~~ Dotiamo X^0 e X^1 della topologia discreta e costruiamo uno spazio topologico T associato a X

$$T = X^0 \sqcup X^1 \times [0,1]$$

Sia $\mathcal{R}$ la rel. di eq. su T più fine per cui

$$(e,t) \sim (\bar{e}, 1-t) \quad (e,0) \sim \alpha(e) \quad (e,1) \sim \omega(e)$$
$$\forall e \in X^1,\ t \in I$$

$\operatorname{real}(X) := T/\mathcal{R}$ è la realizzazione del grafo X.

Ex. Mostrare che X è connesso $\iff \operatorname{real}(X)$ lo è.

Mostrare che X è un albero $\iff \operatorname{real}(X)$ è contraibile.

Bounded trees

Sia X ~~gra~~ albero. Con $d(\cdot,\cdot)$, X^0 è uno spazio metrico, dunque ha senso parlare di diametro. Diciamo che X è un albero limitato se ha diametro finito.

Rem X finito $\Rightarrow$ diametro finito.

$X' \subseteq X^0$ di diam $n \Rightarrow$ il sottoalbero generato da X' ha diam $\leq 3n$.

Esercizio Dim. che in realtà vale

$$\operatorname{diam}\left(\begin{smallmatrix}\text{s.alb. gen.}\\ \text{da } X'\end{smallmatrix}\right) \leq n$$

Prop Sia X albero di diam. $n < +\infty$.

1) Diciamo che un vertice è terminale se ha valenza ≤ 1. Sia $t(X)$ l'insieme dei vertici terminali. Allora $t(X) \neq \emptyset$

2) Se $n \geq 2$, $X^0 \setminus t(X)$ è l'insieme di vertici di un sottoalbero di diam. $n-2$

3) Se $n=0$, $X \cong \bullet$, se $n=1$ $X \cong \bullet\!\!-\!\!\bullet$.

Dim. 3 $\to$ ovvio. $2+3 \Rightarrow 1$ ovvio.

2) Sia $X' = X^0 \setminus t(X)$. Se $p, q \in X'$, ogni punto di $[p,q]$ è non terminale. Dunque il sottoalbero generato da X' non ha altri vertici che gli elementi di X'. Se $d(p,q) = m$, possiamo estendere $[p,q]$ a una geod. di lungh.

$m+2$. ~~se~~ $\Rightarrow m+2 \leq n \Rightarrow m \leq n-2$.

Poiché $\mathrm{diam}(X) = n$ $\exists$ geod. di lungh $= n$.
rimuovendo primo e ultimo edge abbiamo una geod. di lungh $n-2$ in X'.

$$\Rightarrow \mathrm{diam}(X') = n-2.$$

Oss. X' è preservato da tutti gli autom. di X.

Per induzione su $\mathrm{diam}(X)$ si dimostra

Cor Un albero di diametro finito (dispari) ha un vertice (geometric edge) invariante sotto tutti gli automorfismi.