Quasi-isometrie

Def. (X_1, d_1), (X_2, d_2) sp. metrici. Una mappa

$$f : X_1 \to X_2$$

è detta quasi-isometria se

1. $\exists\, K \geq 1,\ c \geq 0$ t.c. $\forall x, y \in X_1$

$$\frac{1}{K} d_1(x,y) - c \leq d_2(f(x), f(y)) \leq K d_1(x,y) + c$$

2. $\exists\, M \geq 0$ t.c. $\forall y \in X_2\ \exists\, x \in X_1$ t.c. $y \in B(f(x), M)$.

In tal caso X_1 e X_2 si dicono quasi-isometrici
(se $c = 0$ parliamo di bilipschitz-equiv.)

Esercizio Essere quasi-isometrici è una relazione di equivalenza.

Prop. G gruppo f.g., S ed S' insiemi finiti di generatori. Allora l'identità $i : (G, d_S) \to (G, d_{S'})$ è una quasi-isometria

Dim.

~~Scriviamo gli elementi di S in termini di elementi di S'~~ e sia

$$c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(e, s).$$

Siano $g, h \in G$ e $n := d_S(g,h)$

Dunque $g^{-1} \cdot h = s_1 \cdots s_n$, $s_i \in S \cup S^{-1}$.

Poiché $d_{S'}$ è invariante per trasl. sx per definizione, dalla disuguaglianza triangolare segue

$$
\begin{aligned}
d_{S'}(g,h) &= d_{S'}(g, g \cdot s_1 \cdots s_n) \\
&\leq d_{S'}(g, g \cdot s_1) + d_{S'}(g \cdot s_1, g \cdot s_1 \cdot s_2) + \cdots \\
&\quad + d_{S'}(g \cdot s_1 \cdots s_{n-1}, g \cdot s_1 \cdots s_n) \\
&= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_n) \\
&\leq c \cdot n = c \cdot d_S(g,h).
\end{aligned}
$$

Dunque id è una bilipschitz equivalence fra i due spazi.

<u>Lemma di Milnor–Švarc</u> $G \curvearrowright X$ per isometrie $\boxtimes$

X proper geodesic space. Azione cocompatta ($G \backslash X$ cpt) e propriamente discontinua. Allora G è finitam. generato e $\forall S \subseteq G$ ins. fin. di generatori, $\forall p \in X$, la mappa $f_p : (G, d_S) \to X$, $g \mapsto g p$ è una quasi-isometria

Fini

Def. Sia X un complesso simpliciale loc-cpt.
Per ogni $K \subseteq X$ sottocomplesso cpt., denotiamo con $n(K)$ il numero delle componenti connesse di $X \setminus K$ aventi chiusura non compatta in X (oss: è finito).
Il numero di fini di X è definito come

$$e(X) = \sup_{\substack{K \subseteq X \\ cpt}} \{n(K)\}$$

Oss. 1) È invariante per omeomorfismo.
2) Può essere definito in termini di K s.compl finito e componenti infinite di $X \setminus K$
3) $e(X) = 0 \iff X$ compatto, altrimenti $e(X) \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$

Esempi 1) $e(\mathbb{R}) = 2$

2) $e(\mathbb{R}^n) = 1 \quad \forall n \geq 2$.

3) Sia F il gruppo libero con due generatori a e b, e $X = Cay(F, S)$ il Cayley graph. $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$
Allora $e(X) = +\infty$.

se X loc. cpt. $K \subseteq X$ finito, e $st(K)$ è il sottocomplesso dei simplessi con un vertice in K, allora $st(K)$ è finito. Poiché $K \subseteq st(K)$ abbiamo
$$n(\overline{st(K)}) \geq n(st(K)) \geq n(K).$$

Ogni punto in $X \setminus st(K)$ può essere congiunto a un vertice di $X \setminus K$ tramite un cammino che ~~non~~ evita $st(K)$. Così le componenti connes non compatte sono determinate dall'1-scheletro di X. Quindi quando calcoliamo $e(X)$ possiamo ignorare le celle di dimensione >1 e lavorare solo sull'1-scheletro.

Siano ora $C^*(X) := C^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$C^*_f(X) := \{$ cocatene a supporto finito $\}$.

L'operatore di cobordo manda $C^*_f(X) \to C^{*+1}_f(X)$.

Sia $C^*_e(X) := C^*(X) / C^*_f(X)$; abbiamo la succ. esatta

$$0 \to C^*_f(X) \to C^*(X) \to C^*_e(X) \to 0$$

che induce la successione esatta lunga in coomologia

$$\cdots \to H_f^n(X) \to H^n(X) \to H_e^n(X) \to H_f^{n+1}(X)$$

Nel complesso di cocatene esatte ho

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C_e^0 \xrightarrow{\delta^0} C_e^1 \xrightarrow{\delta^1}$$

$$\mathrm{Im}(\delta^{-1}) = 0$$

$\mathrm{Ker}(\delta^0) = \{$ 0-cocatene esatte ~~da cui im~~ il cui cobordo ha supporto finito $\}$

$$H_e^0(X) = \mathrm{Ker}(\delta^0) / \mathrm{Im}(\delta^{-1}) = \mathrm{Ker}(\delta^0)$$

Queste sono in realtà

$$(\delta^0)^{-1}(C_f^1(X)) / C_f^0(X).$$

<u>Prop.</u> Sia X un complesso simpliciale loc. finito. Allora

$$e(X) = \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_e^0(X)).$$

<u>Dim.</u> Possiamo considerare solo l'1-scheletro di X. Siano $c_1, \ldots, c_n \in H_e^0(X)$ linearmente indipendenti. Poiché δc_i ha supporto finito,

Possiamo scegliere un sottografo finito Λ ~~Φ~~ [4]
dell'1-scheletro di X che contenga tutti i supporti dei δc_i. ~~Cioè~~ In più, possiamo creare un sottocomplesso 1-dimensionale finito K contenente tutti questi edge nei supporti dei δc_i.

$\forall$ edge e, $e \notin K$, abbiamo che c_i assume lo stesso valore ai due estremi di e.

Quindi per ogni componente connessa A di $X \setminus K$, ogni c_i assume un valore costante $c_i(A)$ sui vertici di A.

Se ci fossero solo $r < n$ componenti connesse infinite A_J, allora, poiché ogni c_i assume valore costante su tutti i vertici di A_J, avremmo che esistono dei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che $\sum \lambda_i c_i = 0$.

Quindi $e(X) \geq \dim_{\mathbb{Z}_2} H^0_e(X)$.

Se scegliamo allora K finito con $e_n(K) \geq$
e siano $A_1, \dots, A_n$ c.c. infinite distinte di $X \setminus K$

Definiamo la cocatena c_i che vale 1 su A_i (i vertici di) e 0 altrove.

Se $\delta c_i(e) = 1$, e ha un estremo in A e l'altro in K. Dunque, e è uno degli edge di st(K) (che sono finiti). Quindi ogni δc_i è a supporto finito per costruzione e poiché gli A_i differiscono due a due su infiniti vertici i c_i sono indipendenti modulo le cocatene finite.

Dunque $\dim_{\mathbb{Z}_2} H^0_e(X) \geq e(X)$

$$\Rightarrow e(X) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H^0_e(X).$$

□

Approccio group-theoretic alle fini

Siano $S, T \subseteq U$. Definiamo l'addizione Booleana

$$S+T := \{x \in (S \cup T) \setminus (S \cap T)\}$$

Sia G gruppo: PG parti di G

sono gruppi FG parti finite di G

con l'addizione →

Booleana → $QG = \{A \subset G \mid \forall g \in G \ A + Ag \text{ è finito}\}$

in cui tutti gli elem. hanno ordine 2

Dati due sottoinsiemi di G A e B t.c.

$A \setminus B \subseteq FG$ diciamo che sono quasi-uguali

$$A \overset{a}{=} B.$$

G agisce per traslazioni a destra su PG, FG

e QG e QG/FG è il sottogruppo degli

elementi invarianti.

Gli elementi di QG sono detti quasi-invarianti

Per $A \subseteq G$ sia $A^* := G \setminus A$.

Lemma se $A \subseteq G$ quasi invariante $\Rightarrow A^*$ q-inv.

Dim. $x \in A^* + A^*g$

$$x \in (G \setminus A) + (G \setminus A)g = (G \setminus A) + (G \setminus (Ag))$$

$\Rightarrow x \in G \setminus A \ \vee \ x \in G \setminus Ag$

$\Leftrightarrow x \in A$ o $x \in Ag \Rightarrow x \in A + Ag$, che

è finito $\Rightarrow A^*$ quasi-invariante. $\square$

Def. Il numero di fini di G è

$$e(G) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \left({}^{QG}/_{FG} \right)$$

Oss. - Se G è finito $\Rightarrow e(G) = 0$.

- Altrimenti, G_n è un insieme infinito invariante, quindi $e(G) \geq 1$.

Sia G finitamente generato, S un insieme di generatori e Γ_S il grafo di Cayley (che è loc. finito).

Prop. Per ogni insieme di generatori finito S vale che $e(G) = e(\Gamma_S)$. [8]

Dim. Identificando i vertici di Γ_S con gli elementi di G, vediamo una corrispondenza tra $C^0(\Gamma_S)$ e PG, e $C^0_f(\Gamma_S)$ ed FG.

Mostriamo che, se la 0-cocatena c corrisp. al sottoinsieme A, allora δc ha supporto finito $\iff A \in QG$.

~~Se~~ δc è supportato nell'insieme degli edge $\{(g, gs) \mid g \in G, s \in S\}$ con un solo estremo in A.

Per s fissato, ciò significa che g appartiene a solo uno tra A e As^{-1}, ossia $g \in A + As^{-1}$.

Se A è quasi invariante, per ogni s ci sono solo finiti g. G è finitamente generato quindi abbiamo un numero finito di edge in totale, e $A \in QG \Rightarrow \delta c$ ha supporto finito.

Viceversa se δc ha supp. finito, ci sono finiti edge con un estremo in A e uno non in A. Ogni generatore s rappresenta uno di questi edge, quindi As differisce da A in finiti punti. Quindi se $g \in S \cup S^{-1}$, la classe di A e $PG/_{FG}$ è invariante per g. Inoltre, la cocatena c_s corrispondente ad A_s ha cobordo con supporto finito.

Supponiamo ora che $\forall g$ t.c. $d_S(1, g) = p$ la classe di A sia invariante per g. Procediamo per induzione su p ($p = 0$ ✓).

Sia h t.c. $d_S(1, h) = p+1$.

$h = h' \cdot s$ con $d_S(h', 1) = p$, $s \in S \cup S^{-1}$.

Per ipotesi induttiva Aa' è quasi invariante. Quindi, la classe di A_h è invariante in $PG/_{FG}$.

$\Rightarrow$ la classe di A è invariante per ogni $g \in G$

$\Rightarrow A \in QG$ ~~δc ha supporto finito~~

Abbiamo mostrato che 0-cocatene con cobordo a supp. finito corrispondono a elem. di QG. quindi

$$QG/FG = \mathbb{Z}\,\delta^{-1}(C^1_f)\big/C^0_f = H^0_e(X)$$

$\square$

Questa definizione è evidentemente indipendente dalla scelta dei generatori, quindi $e(G)$ ora è ben definito.

<u>Fini con i raggi</u>

<u>Def</u>. Un raggio in uno sp. top. X è una mappa continua $r:[0,+\infty)\to X$. Due raggi propri r_1 e r_2 convergono alla stessa fine se $\forall\, C\subset X$ cpt $\exists\, N\in\mathbb{N}$ t.c. $r_1[N,+\infty)$ ed $r_2[N,+\infty)$ sono contenuti nella stessa ccpa di $X\setminus C$.

Questo definisce una rel. di eq. tra i raggi propri. La classe di equivalenza di r si denota con $end(r)$, e l'insieme delle classi di equivalenza con $Ends(X)$.

Se $|Ends(X)| = n$ si dice che X ha n fini

Prop. Sia Γ gruppo $S \subseteq \Gamma$ $\Gamma = \langle S \rangle$

allora

$$e(\Gamma_S) = \sup_{\substack{K \subseteq \Gamma_S \\ \text{sgrafo finito}}} \{n(K)\} = |\mathrm{Ends}(\Gamma_S)|.$$

$$(= |\mathrm{Ends}(\Gamma)|).$$

Dim. supponiamo $\sup\{n(K)\} \geq N$ (poss. $N = +\infty$)

Allora $\exists K_N$ cpt $n(K_N) \geq N$, cioè, esiste un sottografo finito $K_N \subseteq \Gamma_S$ t.c. $\Gamma_S \setminus K_N$ ha almeno N c.c. infinite, siano esse C_i.

Poiché le C_i sono infinite in ognuna di esse c'è un raggio proprio (almeno), ~~ma~~ e poiché in $\Gamma_S \setminus K_N$ le C_i ~~non sono~~ sono distinte ~~connesse~~ ogni raggio è in una diversa classe di equivalenza

$\Rightarrow |\mathrm{Ends}(\Gamma_S)| \geq e(\Gamma_S)$.

Supponiamo ora $|\mathrm{Ends}(\Gamma_S)| \geq N$. Allora $\exists K$ cpt t.c. $\forall M \in \mathbb{N}$ $r_i[M, +\infty)$ ed $r_j[M, +\infty)$ giacciono in componenti connesse per archi differenti. Se ci fossero meno di N cpa infinite, almeno due raggi non equivalenti starebbero nella stessa componente connessa $\Rightarrow$ deve essere che $e(\Gamma_1) \to \mathrm{Ends}(\Gamma_5)$ ~~.....~~, tesi. □

Def. X metrico. Un K-cammino che connette x e y è una succ. finita

$$x_1 = x, \ x_2, \ \ldots, \ x_n = y \quad t.c.$$

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq K \quad \forall i = 1, \ldots, n-1.$$

Lemma X proper geodesic space, $K > 0$, r_1, r_2 raggi propri. Sia $G_{x_0}(X)$ l'insieme dei raggi geodetici che partono da $x_0 \in X$. Allora

1) $\mathrm{end}(r_1) = \mathrm{end}(r_2) \iff \forall R > 0 \ \exists T > 0$ t.c. $\forall t > T$ $r_1(t)$ può essere connesso a $r_2(t)$ con un K-cammino in $X \setminus B(x_0, R)$.

2) La mappa $G_{x_0}(X) \to \mathrm{Ends}(X)$ è suriettiva.

Def. Una geodetica di lunghezza L è un embedding isometrico $f: [0, L] \to X$. Se $\forall x, x'$ c'è una geodetica fra x e x' X è $\underbrace{\text{geodetico}}$. X è PROPRIO se $\forall x \in X$ $r > 0$ $\overline{B(x, r)}$ è compatta rispetto alla topologia indotta dalla metrica

Proprietà delle fini

Def. (X,d) metrico. Un raggio geodetico in X è $c:[0,+\infty)\to X$ t.c. $d(c(t),c(t'))=|t-t'|$.

Lemma X_1, X_2 proper geod. spaces.
Allora ogni $f: X_1 \to X_2$ quasi-isometria induce $f_\mathcal{E}: Ends(X_1) \to Ends(X_2)$ omeomorfismo

Corollario $|Ends(X)|$ è invariante per quasi-isometrie.

Dim. Sia r raggio geodesico in X_1.
Sia $f_*(r)$ un raggio in X_2 ottenuto concatenando dei segmenti geodetici $[f(r(n)), f(r(n+1))]$ $n \in \mathbb{N}$. Poiché f è una (λ,ε)-q.i., questo è un raggio geodetico proprio.
$end(f_*(r))$ è indipendente dalla scelta dei segmenti geodetici
Definiamo
$$f_\mathcal{E}: Ends(X_1) \to Ends(X_2)$$
$$end(r) \to end(f_*(r))$$

f manda K-cammini in $(\lambda K+\varepsilon)$-cammini
Quindi $f_\mathcal{E}$ è ben definita sulle classi di equivalenza e continua per 1)-Lemma. Per 2)-Lemma è

definita su $\mathrm{Ends}(X_1)$.

Se $f': X_2 \to X_1$ è una inversa quasi-isometrica per f, $f'_\varepsilon f_\varepsilon = (f'f)_\varepsilon = \mathrm{id}$ su $\mathrm{Ends}(X_1)$. $\square$

<u>Esempio</u> $\mathrm{Ends}(\mathbb{Z}) = 2$

<u>Prop.</u> Se $H \underset{i.f.}{<} G \Rightarrow e(G) = e(H)$.

<u>Dim.</u> Claim: Se G finitamente generato, $G = \langle S \rangle$ allora (G, d_S) è quasi-isometrico a $(H, d_{S \cap H})$

$\hookrightarrow$ $H \curvearrowright (G, d_S)$ libera e propria.

Il quoziente è finito $\Rightarrow$ cocompatto

$\to$ tesi segue da Svarc-Milnor.

<u>Caso generale</u> Costruiamo un isom. $QG/FG \to QH/FH$

Sia A q.i. in G, $a \in H$.

$x \in (A \cap H) + (A \cap H) \cdot a \Leftrightarrow x$ è in esattamente uno tra $A \cap H$ e $(A \cap H) \cdot h$

cioè $x \in H$ e $x \in A + Ah$. Quindi

$$(A \cap H) + (A \cap H) h = \underbrace{(A + Ah)}_{\text{finito } \forall a} \cap H$$

$\Rightarrow A \cap H + (A \cap H) h$ finito $\Rightarrow A \cap H$ è quasi invariante.

Questo da una mappa $\pi : QG \to QH$.

Sia $\tilde{\pi} : QG/_{FG} \to QH/_{FH}$ mappa indotta

$$\tilde{\pi}(A + FG) = (A \cap H) + F(G \cap H)) = (A \cap H + FH)$$

$\tilde{\pi}$ è ben definita perché se $A \overset{a}{=} B$

$$\Rightarrow A \cap H \overset{a}{=} B \cap H$$

$$\tilde{\pi}((A+B) + FG) = ((A+B) \cap H) + FH$$
$$= ((A \cap H) + (B \cap H)) + FH$$
$$= (A \cap H + FH) + (B \cap H + FH)$$
$$= \tilde{\pi}(A + FG) + \tilde{\pi}(B + FG)$$

$\Rightarrow \tilde{\pi}$ è un omomorfismo.

Per $A \in QG$, se $A \cap H$ è finito lo è anche $Ag^{-1} \cap H$
$(A \in QG \Rightarrow A \overset{a}{=} Ag^{-1}) \Rightarrow A \cap Hg$ è finito.

Sia T un sottoinsieme di rappresentanti di H in G che contiene un elemento di ogni laterale sx di H

$A = \bigcup_{g \in T} A \cap Hg$ è finito (H ha indice finito in G).

$\Rightarrow \pi$ mappa solo insiemi finiti in insieme finiti.

quindi $\tilde{\pi}$ mappa solo l'identità di $QG/_{FG}$ nell'1 di $QH/_{FH}$ $\Rightarrow \tilde{\pi}$ è iniettiva.

Sia $B \subset H$ quasi-invariante. Poniamo

$A = BT$ t.c. $A \cap H = B$. $\forall g \in G, t \in T$,

$tg = h_t \cdot s$ $(s \in T)$

Però $A + Ag = \bigcup_t Bt + Btg \Rightarrow \bigcup_t (Bt + Bh_t s)$

B quasi invariante $\Rightarrow Bt + Bh_t s$ finito.

Γ finito $\Rightarrow \widetilde{A + Ag}$ finito

$\Rightarrow A \in QG$ $\quad \widetilde{\pi}(A) = B \Rightarrow \widetilde{\pi}$ surgettiva

$\square$

~~**Lemma 1** $K \triangleleft G$ finito $\Rightarrow e(G) = e(G/K)$.~~

Lemma 2 $A_0, A_1 \in QG$. Per quasi ogni $g \in G$

o $gA_1 \subseteq A_0$ o $gA_1^* \subseteq A_0$.

Def. $A \subseteq G$. Il ~~sotto~~gruppo di isotropia di A è definito come $H := \{h \in G \mid hA \overset{a}{=} A\}$.

Prop. G finitamente generato, $A \in QG$ t.c. sia A che $A^* (:= G \setminus A)$ sono infiniti, e che il ~~sotto~~gruppo di isotropia di A è infinito.

Allora G ha un sgrp. ciclico infinito di indice finito.

Dim. Se $A \cap H$ è finito allora $A^* \cap H$ è infinito, quindi wlog supp. $A \cap H$ infinito.

Per Lemma p. 7 A q. inv $\Rightarrow A^*$ q. inv. Diciamo wlog $1 \in A$.

Per Lemma 2, per quasi ogni $g \in A$ o $gA \subset A \setminus \{1\}$ o $gA^* \subseteq A \setminus \{1\}$.

~~Vogli~~ Sia $c \in H \cap A$ che soddisfa una di queste. Esiste perché ~~tutta via~~, solo finiti elementi in A non lo fanno, quindi essendo $|H \cap A| = +\infty$ c'è tale c.

$c \in H \Rightarrow cA \overset{a}{=} A$, e perché A^* q. inv. $c \cdot A^* \cap A \setminus \{1\}$ è finito

Quindi $cA \subset A \setminus \{1\}$. Ora mostriamo che c genera lo $\mathbb{Z}$ di indice finito che cerchiamo

$cA \subset A \setminus \{1\} \Rightarrow c^2 A \subseteq cA \setminus \{c\} \subseteq cA$. Segue

$c^n A \subseteq c^{n-1} A \subset \dots \subset cA \subset A \setminus \{1\}$.

$\Rightarrow \{1\} \notin c^n A \Rightarrow c^n \neq 1 \ \forall n > 0 \Rightarrow c$ ha ordine infinito

$1 \in A \Rightarrow c^n \in A \ \forall n > 0$. Inoltre $c^n A \subseteq A \setminus \{1\}$

se $c^{-n} \in A \Rightarrow 1 \in c^n A$. Quindi $c^{-n} \in A^* \ \forall n > 0$.

Se per assurdo
$$d \in \bigcap_{n\geq 0} c^n A.$$
Allora $c^{-n} \in Ad^{-1}$ $\forall n \geq 0$, $c^{-n} \in Ad^{-1} + A$ poiché $c^{-n} \notin A$

Però $Ad^{-1} + A$ è finito e tutti i c^{-n} sono distinti $\Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow \bigcap_{n\geq 0} c^n A = \emptyset$

$$\Rightarrow A = (A \setminus cA) \cup (cA \setminus c^2 A) \cup \dots, \text{ cioè}$$
$$A = \bigcup_{n \geq 0} (c^n A \setminus c^{n+1} A)$$

$$= \bigcup_{n\geq 0} c^n (A \setminus cA)$$

$A \setminus cA$ è finito (cctt, $A \overset{a}{=} cA$).

$$\bigcup c^n (A \setminus cA) = \bigcup \{ \langle c \rangle a \mid a \in \overbrace{A \setminus cA}^{\text{finito}} \}.$$

Quindi A è contenuto nell'unione di finito coset di $\langle c \rangle$ in G.

Analog., A^* è contenuto nell'unione di finiti coset di $\langle c \rangle$.

$G = A \cup A^*$ $\Rightarrow$ $\langle c \rangle$ ha indice finito in G.

$\square$

Teorema (Freudenthal-Hopf) G finitamente generato. Allora $e(G) \in \{0, 1, 2, +\infty\}$. $\boxed{19}$

Dim. Supponiamo $e(G) \neq 0, 1, +\infty$.

~~Allora~~ $e(G) \neq 0 \Rightarrow G$ è infinito.

$$e(G) \neq +\infty \Rightarrow {}^{QG}/_{FG} \text{ è finito}$$

$$e(G) \neq 1 \Rightarrow \left|{}^{QG}/_{FG}\right| \geq 4.$$

Una classe di equivalenza in questo quoziente è la classe del $\emptyset$, un'altra è la classe di G.

~~Se ce ne fosse~~ Prese un'altra classe, abbiamo un insieme A t.c. sia A che A^* sono infiniti. Sia H il sgt. di isotropia di A.

Supponiamo H abbia indice infinito. Allora ci sarebbero un insieme infinito di coset di H $(g_1 H, g_2 H, \dots)$. Prendendo un rappresentante per ognuno otteniamo $g_i A \overset{a}{\neq} g_j A \; \forall i \neq j$. Questi saranno insiemi quasi invarianti e sono infiniti, assurdo.

Quindi H ha indice finito, quindi è infinito

Siamo nelle ipotesi della proposizione precedente

$\Rightarrow G$ ha un sgr ciclico infinito di indice finito.

$\Rightarrow e(H) = e(\mathbb{Z}) = 2$ e per ~~Lemma~~ Prop p.14

$e(G) = e(H) = 2.$

<u>Teorema</u> (Caratterizzazioni gruppi con 2 fini)

G finitamente generato. TFAE:

Hopf, $\to$ 1. $e(G) = 2$

Freudenthal $\to$ ~~2. G ha uno $\mathbb{Z}$-sgr. di indice finito~~

'40s 3. G ha un sgr. normale finito con quoziente

$\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ $\leftarrow$ (Wall, '67)

~~Wall~~ 4. $G = F *_{\mathbb{Z}}$ con F finito, o

$G = A *_F B$ con F finito e

$[A : F] = [B : F] = 2$.

(2) $\Rightarrow$ (1) ok

(3) $\Rightarrow$ (1) Lemma $e(G) = e(G/N)$

$e(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = e(D_\infty) = e(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2) = e(\mathbb{Z}) = 2.$

(1) $\Rightarrow$ (2) Per ragionamenti analoghi a prima, c'è $A \in QG/_{FG}$ con A e A^* infiniti e H gruppo di isotropia infinito. Quindi troviamo uno $\mathbb{Z}$ di indice finito in G per le proposizioni precedenti.

(4) $\Rightarrow$ (3) Se $G = F *_{\varphi}$ con F finito, F è normale in G con quoziente $\mathbb{Z}$.

Se $G = A *_F B$ con F finito e $[A : F] = [B : F] = 2$ allora F è normale in A e B, dunque F è normale in G e

$$G/_F \cong (A/_F) * (B/_F) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = D_\infty.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) a) $G/_F \cong \mathbb{Z}$, $F \trianglelefteq G$ finito.

Allora $G \cong F \rtimes K$, $K \cong \mathbb{Z}$

Se la presentazione di F è $\langle Y \mid T \rangle$ la presentazione di G è $\langle Y, t \mid T, t^{-1} a t = f(a) \;\; a \in F \rangle$

$\Rightarrow G = F *_{\varphi}$.

(b) $G/F \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Prendiamo il pullback dei generatori degli $\mathbb{Z}_2$ (siano essi a e b). Questi sono elementi il cui quadrato sta in F. Poiché F è normale otteniamo due sottogruppi $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$ in cui F è un sottogruppo di indice 2 (quindi normale) e t.c. $A \cap B = F$.

Costruiamo $\varphi : A *_F B \to G$

ponendo $\varphi(A) = A$ e $\varphi(B) = B$ ed ~~Questo si~~ estendendo φ a un omomorfismo che è surgettivo. Inoltre se $\varphi(\underbrace{\prod a_i b_j}_{\text{scrittura ridotta}}) = 1$ allora $(\prod a_i b_j) = 1$ perché φ è id su A e B

$\Rightarrow \varphi$ iniettivo $\Rightarrow$ isomorfismo

+ A e B hanno indice 2

(2) => (3) Sfruttiamo l'esistenza di $C \underset{if}{<} G$ $C \cong \mathbb{Z}$ per costruire $K \underset{if}{\triangleleft} G$ $K \cong \mathbb{Z}$.

Poniamo $K := \bigcap_{g \in G} g^{-1} C g$. Se $h \in G$

$$h^{-1} K h = h^{-1}\left(\bigcap_{g\in G} g^{-1} C g\right) h = \left(\bigcap_{g \in G} h^{-1} g^{-1} C g h\right)$$
$$= \bigcap_{g \in G} g^{-1} C g = K.$$

Quindi K è normale. Inoltre, poiché C ha indice finito, l'intersezione è finita, dunque K è ciclico infinito di indice finito.

Facciamo agire G su K tramite coniugio e sia H il centralizzatore di K in G.

Per ogni $g \in G$, poiché K è normale, il coniugio ϕ_g definisce un automorfismo di K. Poiché $K \cong \mathbb{Z}$, $Aut(K) \cong \mathbb{Z}_2$, dunque $[G : H] \leq 2$ dunque $H \triangleleft G$ e H infinito.

H è finitamente generato in quanto sgr. di indice finito di un gruppo finitamente generato.

Notiamo che $K < Z(H)$, e poiché K ha indice finito in G, $Z(H)$ ha indice finito in H.
~~Tuttavia~~ FATTO ma ciò implica che il ~~suo~~ sottogruppo dei commutatori di $\cancel{Z(H)}$ H, sia esso H', è finito.

Poiché G ha un sgruppo ciclico di indice finito, H/H' ha rango 1. $\Rightarrow \exists\, \phi: H \to \mathbb{Z}$ surg. con $\mathrm{Ker}(\phi) = L$ finito. Se $G = H$ $G/L \cong \mathbb{Z}$, tesi.

Supponiamo $G \neq H$. Poiché H ha rango 1 (H' finito), L è la torsione di H, ed è normale, anzi, caratteristico (è il sgr di torsione).
L'azione per coniugio di G su H dà luogo ad un autom. di H $\forall g \in G$ che lascia L invariante, dunque L è normale in G. Poiché $[G:H]=2$ per il terzo teorema di isomorfismo abbiamo

$$\frac{G/L}{H/L} \cong \mathbb{Z}_2 .$$

Poiché $G \neq H$, $\exists g \in G$ che non commuta con qualche $k \in K$. k deve essere non banale in G/L poiché ha ordine infinito. $K \trianglelefteq G$ implica $g^{-1}kg \in K$. $\underset{\underset{K}{\cap}}{[k,g]} = k^{-1}g^{-1}kg \neq 1$

$\Rightarrow$ ha ordine infinito. Dunque è un commutatore non banale in $G/L \Rightarrow G/L$ non abeliano

Sia $\bar{x} \in \dfrac{G/L}{H/L}$ non banale e poniamo $H/L = \langle y \rangle$ (è ciclico)

$\Rightarrow G/L = \langle x, y \rangle$.

G/L non abeliano $\Rightarrow x^{-1}yx \neq y$.

y ha ordine infinito $\Rightarrow x^{-1}yx = y^{-1}$.

$x^2 \in H/L \Rightarrow x^2 = y^n$. $\Rightarrow x^{-1}y^n x = y^{-n} = x^{-2}$

Ciò

~~cioè~~ ma anche $x^{-1} y^n x = x^{-2}$

$$\Rightarrow x^2 = y^{-n}$$

$$\Rightarrow n = 0,\ x^2 = 1 \text{ in } G/L$$

$$G/L = \langle x, y \rangle,\ \langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$$

$$\text{e } \langle y \rangle \triangleleft G/L$$

$$\Rightarrow G/L \cong \mathbb{Z} \rtimes_\phi \langle x \rangle$$

$$\text{con } \phi(y) = x^{-1} y x = y^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \mid x^2, x^{-1} y x y \rangle = D_\infty$$

$$\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2.$$

$\square$

<u>Teorema</u> (Stallings) G gruppo fin. gen. con ∞ fini

1. Se G torsion-free allora G è un prodotto libero non banale, altrimenti
2. G è un prodotto amalgamato non banale $G \cong A *_C B$, con C finito.